Wnioskowanie statystyczne i weryfikacja hipotez statystycznych

Wnioskowanie statystyczne

Wnioskowanie statystyczne obejmuje następujące czynności:

- Sformułowanie hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej.
- Ustalenie poziomu istotności α .
- Wybór statystyki do weryfikacji hipotezy H0 i ustalenie obszaru krytycznego (wartości krytycznych).
- Obliczenie wartości statystyki w próbie.
- Sformułowanie wniosków (weryfikacja hipotezy H0) przez porównanie wartości obliczonej statystyki z wartościami krytycznymi; będzie to jeden z dwóch wniosków:

– odrzuca się hipotezę zerową i za prawdziwą uznaje się hipotezę alternatywną,
– nie ma podstaw do odrzucenia H0 (co nie oznacza jej przyjęcia).

Definicje

Przedziałem ufności – nazywamy taki przedział, który z zadanym z góry prawdopodobieństwem $1-\alpha$ zwanym poziomem ufności lub współczynnikiem ufności, pokrywa nieznaną wartość szacowanego parametru.
α to poziom istotności

Hipotezą statystyczną – nazywamy każdy sąd o zbiorowości generalnej, wydany bez przeprowadzenia badania całkowitego, prawdziwość hipotezy statystycznej orzeka się na podstawie próby losowej.

Hipoteza zerowa H_0 – hipoteza sprawdzana (testowana, weryfikowana).

Hipoteza alternatywna H_1 – hipoteza, którą można przyjąć, gdy zostanie odrzucona hipoteza zerowa H_0.

Sprawdzianem hipotezy – (zwanym też statystyką testową) jest taka zmienna losowa T, o znanym rozkładzie, której wartość empiryczna $t_{emp.}$, policzona na podstawie próby losowej, pozwala na podjęcie decyzji, czy przyjąć, czy też odrzucić hipotezę H_0.

Zbiór krytyczny Z – jest to zbiór tych wartości sprawdzianu hipotezy, które przemawiają za odrzuceniem hipotezy H_0. W zależności od hipotezy może być zbiorem jednostronnym (prawostronnym lub lewostronnym) albo zbiorem dwustronnym.

Konstruowanie przedziału ufności dla wartości przeciętnej

Jeżeli mamy dużą próbę (n>30) oraz cecha X ma rozkład normalny X ~ N(m, σ), wówczas przedział ufności dla parametru *m* ma postać:

$$E(X) - t_{\alpha} \cdot \frac{D(X)}{\sqrt{n}} < m < E(X) + t_{\alpha} \cdot \frac{D(X)}{\sqrt{n}}$$

gdzie:

$E(X)$ - średnia arytmetyczna

$D(X)$ - odchylenie standardowe, założenie ($D(X) = S$)

n - liczebność próby

m - wartość oczekiwana (przeciętna),

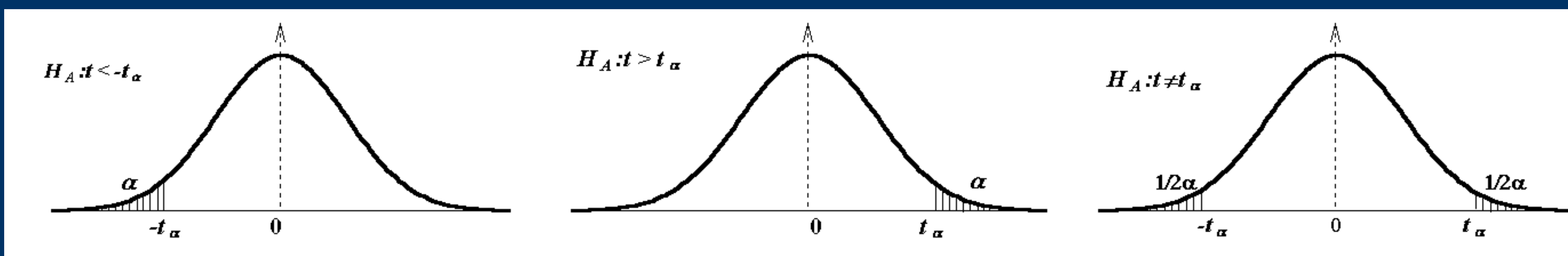
t_{α} - wartość krytyczna odczytana z tablic rozkładu normalnego, gdzie: $\Phi(t_{\alpha}) = \frac{1-\alpha}{2}$

Przykład

Przypuśćmy, że interesuje nas populacja krów i na podstawie jakichś informacji spodziewamy się, że średnia wydajność mleka w tej populacji jest równa μ_0 = 200 litrów mleka.

Gdybyśmy chcieli na podstawie jakieś próby sprawdzić czy rzeczywiście wartość średnia populacji jest równa 200, przyjęlibyśmy hipotezę zerową H0: μ = 200.

Moglibyśmy sformułować wiele hipotez alternatywnych np.
H_A: μ = 384 litrów mleka, jednak sens mają tylko trzy:
H_1: $\mu < 200$ → hipoteza jednostronna $\mu < \mu_0$ → stosujemy test jednostronny
H_2: $\mu > 200$ → hipoteza jednostronna $\mu > \mu_0$ → stosujemy test jednostronny
H_3: $\mu \neq 200$ → hipoteza dwustronna $\mu \neq \mu_0$ → stosujemy test dwustronny



Przystępując do testowania hipotezy zerowej zakładamy, że jest ona prawdziwa

Przykład – wersja 1 – test dwustronny

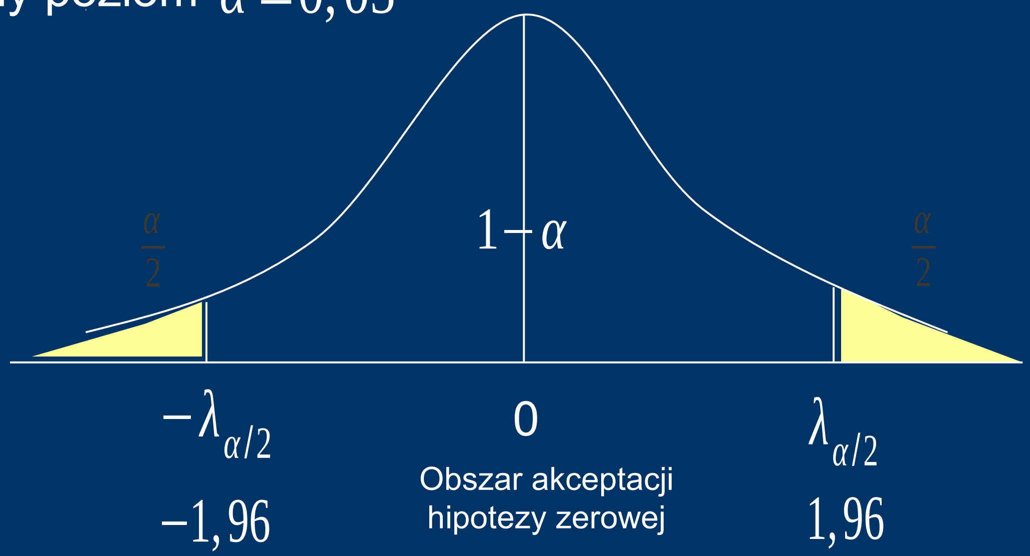
Agronom twierdzi: „średnia ilość mleka to 200 litrów”
Pastuch Kazio mówi: „a wcale bo nieprawda!”
Agronom: zatrudnijmy socjologa i niech zrobi nam badanie
Socjolog: Przeprowadzono badanie na n=324 krowach i uzyskano następujące wyniki: E(X)=198 litrów D(X)=20
Agronom: „to kto qrde… ma rację i o co w tym chodzi?”

		Hipoteza H0	
		prawdziwa	fałszywa
Decyzja	Przyjmujemy H0	$1-\alpha$	Błąd II rodzaju β
	Odrzucamy H0	Błąd I rodzaju α	$1-\beta$

Przykład – wersja 1 – test dwustronny

Socjolog: Przeprowadzono badanie na n=324 krowach i uzyskano następujące wyniki: E(X)=198 litrów, D(X)=20

- Ustalamy poziom $\alpha = 0,05$



$$E(X) - 1,96\frac{D(X)}{\sqrt{n}} \qquad\qquad E(X) + 1,96\frac{D(X)}{\sqrt{n}}$$

$$198 - 1,96\frac{20}{18} = 196 \qquad\qquad 198 + 1,96\frac{20}{18} = 200$$

$$h_0 \in (196\,;200) \rightarrow a_0$$

Przykład – wersja 2 – test lewostronny

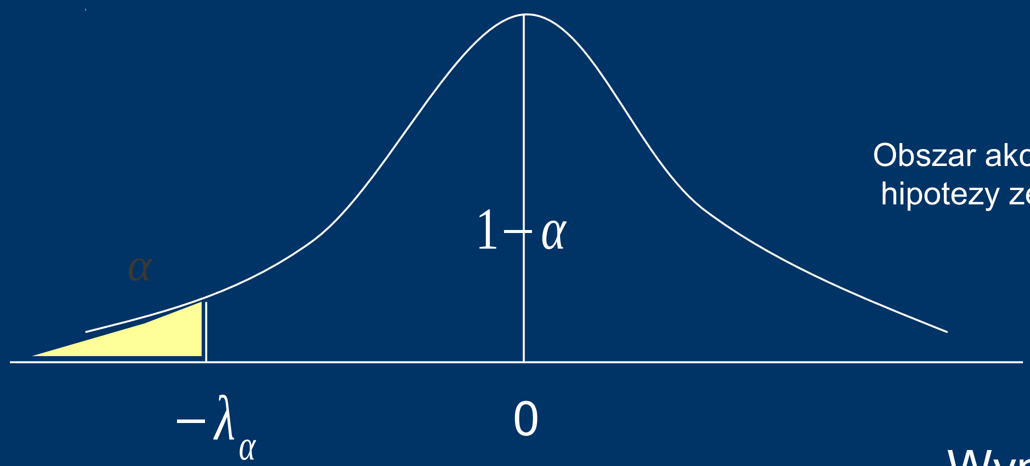
Agronom twierdzi: „średnia ilość mleka to 200 litrów”
Pastuch Kazio mówi: „jak doiłem ostatnio to wyszło mi mniej”
Agronom: zatrudnijmy socjologa i niech zrobi nam badanie
Socjolog: Przeprowadzono badanie na n=324 krowach i uzyskano następujące wyniki: E(X)=198 litrów D(X)=20
Agronom: „to kto qrde… ma rację i o co w tym chodzi?”

		Hipoteza H0	
		prawdziwa	fałszywa
Decyzja	Przyjmujemy H0	1- α	Błąd II rodzaju β
	Odrzucamy H0	Błąd I rodzaju α	1- β

Przykład – wersja 2 – test lewostronny

Hipoteza „zerowa, testowana" h_0 $\mu = 200$

Hipoteza „alternatywna, konkurencyjna" h_1 $\mu < 200$



$\alpha = 0,05$ $-1,64$

Wynik w próbie n=324
E(X)=198
D(X)=20

$$E(X) - 1,64\frac{D(X)}{\sqrt{n}}$$ E(X)

$$198 - 1,64\frac{20}{18} = 196$$

$$h_0 \in \left(196\,;\infty\right) \rightarrow a_0$$

Przykład – wersja 3 – test prawostronny

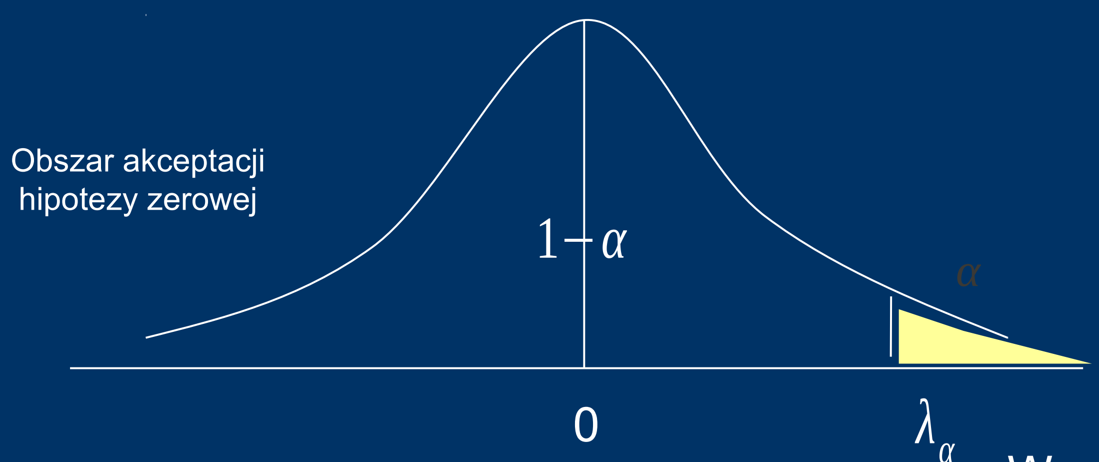
Agronom twierdzi: „średnia ilość mleka to 200 litrów”
Pastuch Kazio mówi: „jak doiłem ostatnio to wyszło mi więcej”
Agronom: zatrudnijmy socjologa i niech zrobi nam badanie
Socjolog: Przeprowadzono badanie na n=324 krowach i uzyskano następujące wyniki: E(X)=198 litrów D(X)=20
Agronom: „to kto qrde… ma rację i o co w tym chodzi?”

		Hipoteza H0	
		prawdziwa	fałszywa
Decyzja	Przyjmujemy H0	1- α	Błąd II rodzaju β
	Odrzucamy H0	Błąd I rodzaju α	1- β

Przykład – wersja 3 – test prawostronny

Hipoteza „zerowa, testowana” h_0 $\mu = 200$

Hipoteza „alternatywna, konkurencyjna” h_1 $\mu > 200$



$1,64$

Wynik w próbie n=324
E(X)=198
D(X)=20

$\alpha = 0,05$

$$E(X) - 1,64\frac{D(X)}{\sqrt{n}}$$

E(X)

$$h_0 \in (-\infty; 200) \to a_0$$

$$198 + 1,64\frac{20}{18} = 200$$